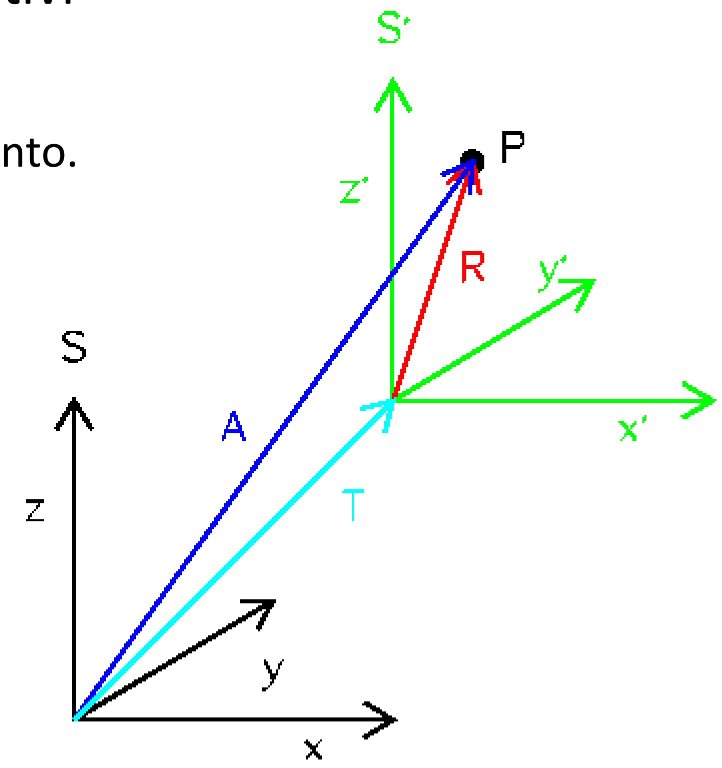
Relativita’ speciale

A. Palano

Testo di riferimento: P.J. Nolan, Complementi di Fisica, fisica moderna, Zanichelli

Moti relativi

- Sistemi di riferimento in moto relativo.
- S: Assoluto, S': relativo, Moto di trascinamento.



- Legge di addizione delle velocita'

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_R$$

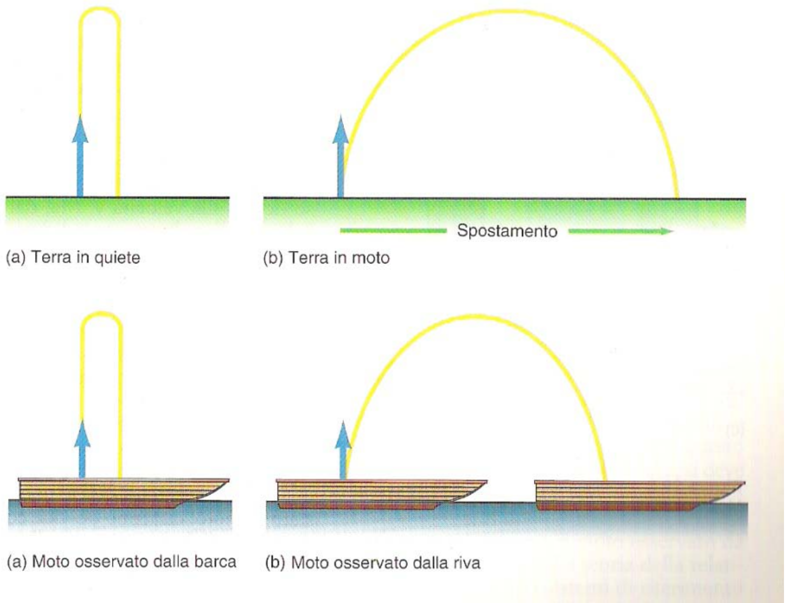
- [Figura]

Sistemi in moto relativo uniforme

- Aristotele. Se la Terra fosse in movimento ce ne accorgeremmo, il punto di caduta di un sasso si sposterebbe con la Terra.

- Galileo. Contestazione dell'argomento di Aristotele,

2 millenni dopo.



- Figura: Moti relativi.

- ``Le leggi della Meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di Riferimento Inerziali, cioe' che si muovano di moto uniforme l'uno rispetto all'altro''.

- Scopriamo quindi che il moto di un corpo e' un concetto relativo. Quanto detto sopra si esprime mediante il ``Principio di Relativita''' che dice che:

- Non c'e' alcun esperimento di Fisica che io possa immaginare che permetta di distinguere un sistema di riferimento a riposo da un'altro in moto uniforme rispetto a questo.

La velocita' della luce

- Il primo a pensare che la luce potesse avere velocita' finita fu Galileo.

- **Metodo delle lanterne**. Lanterne messe a circa 1.5 Km di distanza. Nessun risultato.

- [Metodo astronomico di Roemer.]
- Eclissi di Giove sulla luna Io. Periodo: 42.5 h. Periodo di rivoluzione di Giove: 12 anni.
- Periodo maggiore quando la Terra si allontana da Giove. Periodo minore quando la Terra si avvicina a Giove. Osservazioni a distanza di 3 mesi: 600 sec. Velocita' ottenuta: 2.3 10^8 m/sec.

- Ritardo dovuto al percorso della luce lungo il raggio Terra-Sole.

- **Metodo della ruota dentata di Fizeau.**

- La luce percorre un tratto L=8630. Se durante il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza 2L, la ruota gira in modo tale da inserire un nuovo dente, la luce non viene vista.
- Possiamo scrivere:

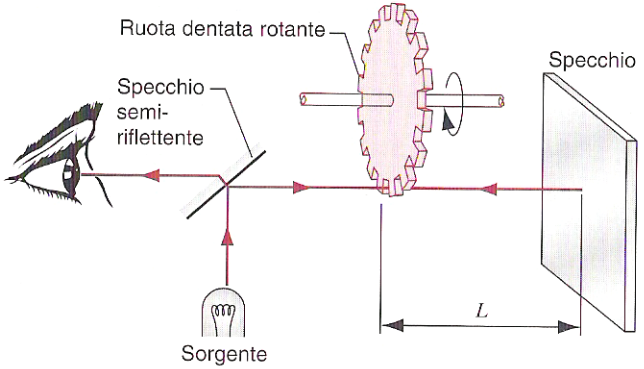
$$\frac{2L}{c} = \frac{\theta}{\omega}$$

- E quindi:

$$c = \frac{2L\omega}{\theta}$$

- Velocita' della luce:

  c = 299 792 458 m/sec



L'esperimento di Michelson-Morley.

- L'esperimento di Michelson-Morley.
- La luce si muove con velocita' **v** rispetto al riferimento assoluto.
- Legge di addizione delle velocita':

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_T} + \mathbf{v_R}$$

- Quindi:

$$\mathbf{v_R} = \mathbf{v_A} - \mathbf{v_T}$$

- La velocita' della luce si trasforma come:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{u}$$

- c' = velocita' della luce nel sistema relativo;
- c = velocita' della luce nel sistema assoluto;
- u = velocita' del sistema relativo rispetto a quello assoluto.
- Tempo impiegato lungo i tratti orizzontali:

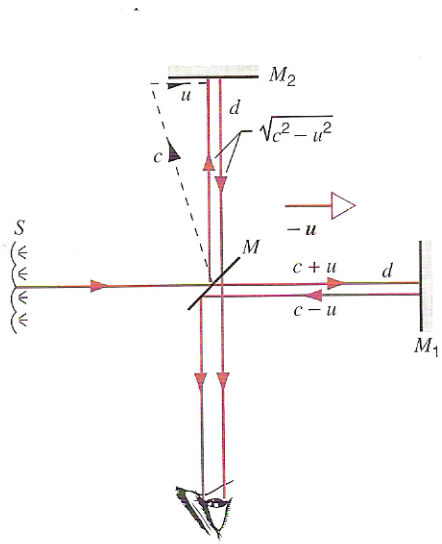
$$t_1 = \frac{d}{c-u} + \frac{d}{c+u} = \frac{2cd}{c^2-u^2} = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-(u/c)^2)}$$

- Tratti verticali:

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

- Differenza temporale:

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-(u/c)^2)} - \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$



L'esperimento di Michelson-Morley.

- Se $u/c << 1$ possiamo sviluppare in serie binomiale: $(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$
- Quindi:

$$t_1 = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-(u/c^2)} = \frac{2d}{c}(1-(u/c)^2)^{-1} = \frac{2d}{c}(1+(u/c)^2)$$

$$t_2 = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{2d}{c}(1-(u/c)^2)^{-1/2} = \frac{2d}{c}(1+\frac{1}{2}(u/c)^2)$$

$$\Delta t = \frac{2d}{c}(1+(u/c)^2 - 1 - \frac{1}{2}(u/c)^2) = \frac{2d}{c}(\frac{1}{2}(\frac{u}{c})^2) = \frac{du^2}{c^3}$$

- Ruotando l'interferometro di 90^0. Variazione di tempo: $2\Delta t$
- Variazione di fase: $\Delta\phi = \omega(2\Delta t)$
- Dove: $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$
- Il massimo numero di frange che si spostano e' :

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\omega 2\Delta t}{2\pi} = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda}(\frac{u}{c})^2$$

- Nell'esperimento di Michelson-Morley *d = 11* m (riflessioni multiple) e $\lambda = 5.9 10^{-7}$.
- Se u e' dell'ordine di grandezza della velocita' orbitale della Terra: $u/c \approx 10^{-4}$.
- Allora:

$$\Delta N = \frac{2d}{\lambda}(\frac{u}{c})^2 = \frac{2 \times 11 \times (10^{-4})^2}{5.9 \times 10^{-7}} = 0.4.$$

- Sensibilita': 0.01 frange.
- Risultato nullo.

Le trasformazioni di Galileo

- Supponiamo due sistemi di riferimento in moto uniforme con velocita' $\underline{v}$ lungo l'asse x.
- Le coordinate si trasformano come:

$$x = x' + vt \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$$

- Trasformazioni delle velocita':

$$v_x = v'_x + v \qquad v_y = v'_y \qquad v_z = v'_z$$

- Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v'_x}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

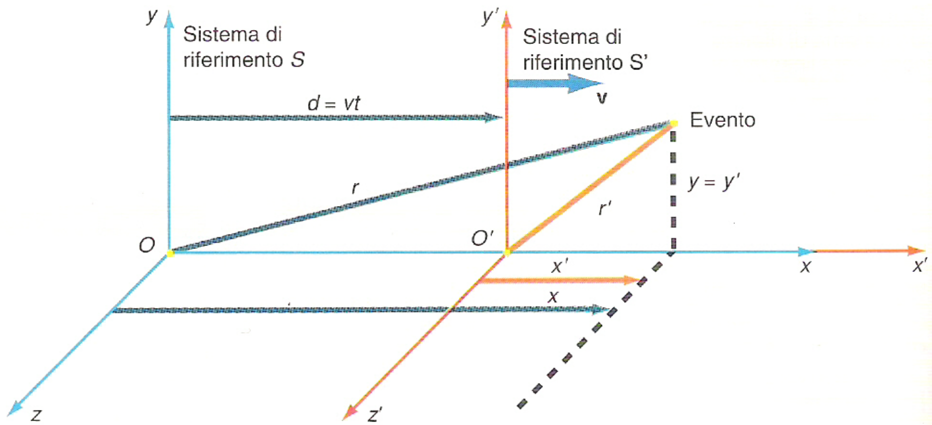
- Se il moto e' uniforme:

$$a_x = a'_x$$

- Moltiplicando per la massa m:

$$m\ a_x = m\ a'_x \qquad F = F'$$

- La seconda legge di Newton e' invariante rispetto ad una trasformazione di Galileo.



Postulati della relativita’

- **1) Le leggi della fisica sono invarianti nei sistemi di riferimento inerziali.**
- **2) La velocita' della luce e' indipendente dal sistema di riferimento.**

- Trasformazione di Lorentz.
- La legge di trasformazione deve ridurre a quella di Galileo per basse velocita':

$$x' = k(x - v\ t) \qquad (1)$$

- Deve essere anche:

$$x = k(x' + v\ t') \qquad (2)$$

- Inoltre:

$$y' = y \qquad\qquad z' = z$$

- *Il tempo scorre quindi in modo diverso nei due sistemi di riferimento.*
- Ricaviamo t' sostituendo la (1) nella (2).

$$x = k(x' + v\ t') = k[k(x - v\ t) + v\ t'] = k^2x - k^2vt + kvt'$$

- Quindi:

$$kvt' = x - k^2 + k^2vt$$

$$t' = kt + (\frac{1-k^2}{kv})x \qquad (3)$$

$$x' = k(x - v\ t) \qquad (1)$$

$$t' = kt + (\frac{1-k^2}{kv})x \qquad (3)$$

Le trasformazioni di Lorentz

- Per determinare k utilizziamo il secondo postulato della relativita'.
- Consideriamo due sistemi di riferimento che coincidano a t=0 e t'=0 e venga emessa un'onda luminosa sferica.
- Entrambi vedono la luce viaggiare con la stessa velocita':

$$x = ct \qquad\qquad x' = ct'$$

- Sostituendo la (1) e la (3), otteniamo:

$$k(x - v\ t) = c[kt + (\frac{1-k^2}{kv})x]$$

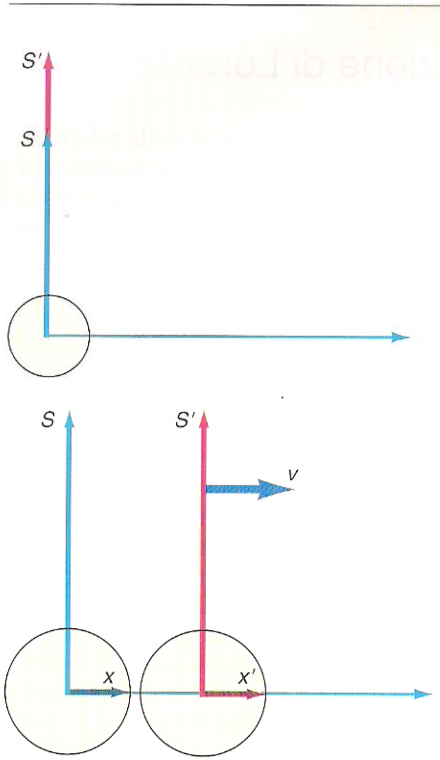
- Risolviamo rispetto a x :

$$kx - kvt = ckt + (\frac{c(1-k^2)}{kv})x$$

$$kx - (\frac{c(1-k^2)}{kv})x = ckt + kvt$$

$$x[k - \frac{c(1-k^2)}{kv}] = ct(k + \frac{kv}{c})$$

$$x = ct[\frac{k + \frac{kv}{c}}{k - \frac{c(1-k^2)}{kv}}]$$



Le trasformazioni di Lorentz

$$x = ct[\frac{k + \frac{kv}{c}}{k - \frac{c(1-k^2)}{kv}}]$$

- Abbiamo pero' che:

$$x = ct$$

- quindi il termine fra parentesi deve essere 1:

$$\frac{k + \frac{kv}{c}}{k - \frac{c(1-k^2)}{kv}} = 1 \qquad \frac{k(1 + \frac{v}{c})}{k(1 - \frac{c(1-k^2)}{k^2 v})} = 1$$

$$1 + \frac{v}{c} = 1 - \frac{c(1-k^2)}{k^2 v}) = 1 - \frac{c}{v}(\frac{1}{k^2} - 1) = 1 - \frac{c}{vk^2} + \frac{c}{v}$$

$$\frac{v}{c} - \frac{c}{v} = -\frac{c}{vk^2}$$

$$k^2(\frac{v}{c} - \frac{c}{v}) = -\frac{c}{v}$$

$$k^2 = \frac{-\frac{c}{v}}{\frac{v}{c} - \frac{c}{v}} = \frac{\frac{c}{v}}{\frac{c}{v} - \frac{v}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}\frac{v}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Quindi:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Otteniamo infine:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Le trasformazioni di Lorentz

$$t' = kt + (\frac{1-k^2}{kv})x \qquad (3)$$

- Ricaviamo ora come si trasforma il tempo.
- Sostituiamo $\underline{k}$ nella (3).

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + [\frac{1-\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}]x$$

- Semplificando:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + (1-\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}})(\frac{x}{v})\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{(1-\frac{v^2}{c^2}-1)x}{(1-\frac{v^2}{c^2})v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{x}{v}}$$

- E infine:

$$t' = \frac{t-\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Trasformazioni di Lorentz

- Otteniamo infine:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Queste si trasformano in quelle di Galileo quando $\underline{v << c}$.

- Spazio e tempo intimamente correlate quindi: spazio-tempo.
- Introduciamo le quantita':

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- Possiamo quindi scrivere:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t' = \gamma(t - \frac{\beta x}{c})$$

- Trasformazioni inverse:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma(t' + \frac{\beta x'}{c})$$

Lo spazio di Minkowski

- L'insieme di tutti i punti nello spazio-tempo viene chiamato universo.
- Una traiettoria nello spazio tempo viene chiamata linea di universo.
- Consideriamo un diagramma Cartesiano in cui l'asse orizzontale sia definito come:

$$\tau = ct$$

- Quindi questa rappresenta una lunghezza.
- In questo diagramma calcoliamo:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{v}{c}$$

- Quindi:

$$tg\theta = \frac{v}{c}$$

- Se $\underline{\theta = 45^0}$ allora:

$$v = c$$

- Le linee a $\underline{45^0}$ rappresentano le linee di universo dei raggi di luce.

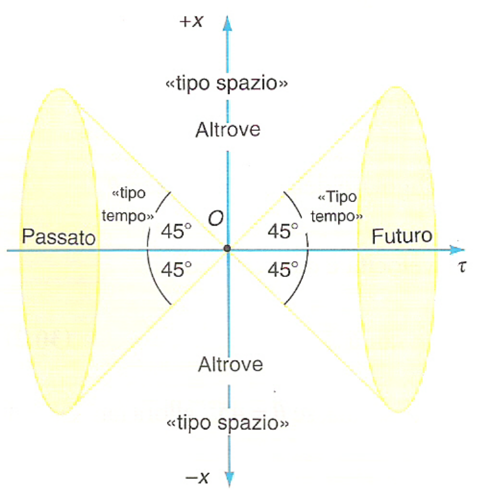
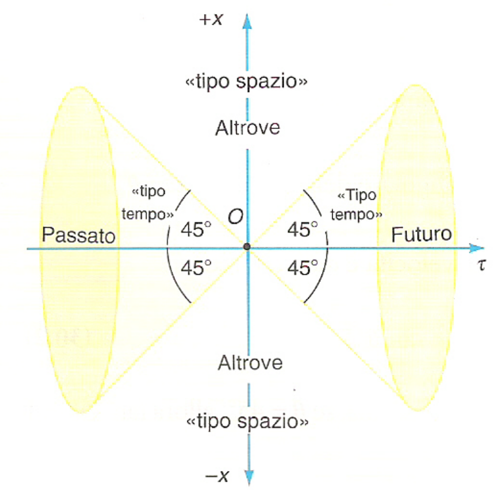


Figura 30.4

Quadrivettori

- Cono di luce. Eventi spacelike e timelike.
- Invarianti relativistici. Quadrivettore.
- I quadrivettori sono definiti come quantita' la cui lunghezza e' un invariante relativistico. Essa ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento.
- Facciamo vedere che la quantita':

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t)$$



- e' un quadrivettore. Deve essere quindi:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = invariante$$

- Per semplicita' consideriamo un segmento solo lungo l'asse x.
- Calcoliamo la quantita':

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

- Dalle trasformazioni di Lorentz

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma\Delta t - \frac{\beta\Delta x}{c}$$

- Quadrando e sottraendo:

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = \gamma^2[c^2(\Delta t)^2 + \frac{v^2}{c^2}(\Delta x)^2 - 2v\Delta x\Delta t] - \gamma^2[(\Delta x)^2 + v^2(\Delta t)^2 - 2v\Delta x\Delta t]$$

$$= \gamma^2[c^2(\Delta t)^2 - v^2(\Delta t)^2 + \frac{v^2}{c^2}(\Delta x)^2 - (\Delta x)^2] \qquad = \gamma^2[(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 - (1 - \frac{v^2}{c^2})(\Delta x)^2]$$

$$= \frac{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})(\Delta t)^2 - (1 - \frac{v^2}{c^2})(\Delta x)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Quadrivettori

- Ovvero la lunghezza di questo segmento spazio-temporale e' un invariante relativistico.
- La lunghezza di un segmento e' quindi:

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2$$

- Il luogo dei punti equidistanti da un dato punto non e' una circonferenza ma un'iperbole. Non vale quindi il teorema di Pitagora e quindi lo spazio-tempo e' detto non-euclideo (iperbolico).
- Figura. Un segmento puo' essere:

$$(\Delta s)^2 < 0, \qquad (\Delta x)^2 > (\Delta \tau)^2$$

- e viene detto timelike. Questo segmento puo' essere nel futuro o nel passato
- Se

$$(\Delta s)^2 > 0, \qquad (\Delta \tau)^2 > (\Delta x)^2$$

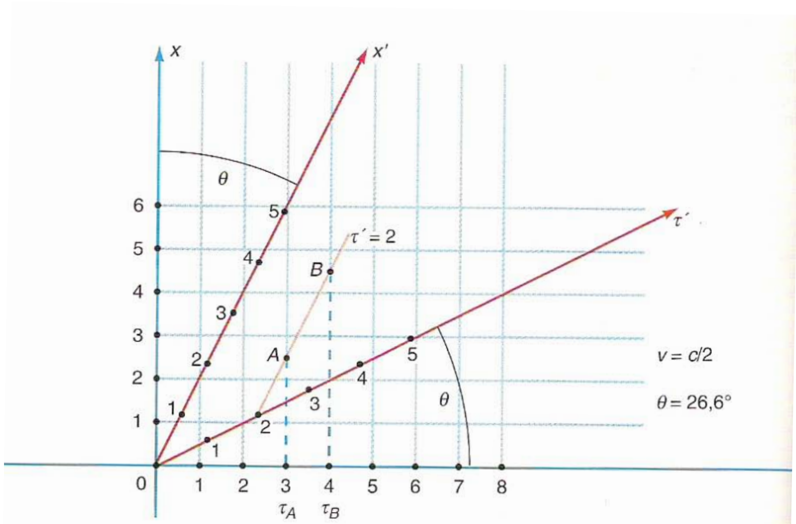
- viene detto spacelike. Tale segmento e' posto nel presente.
- Quando:

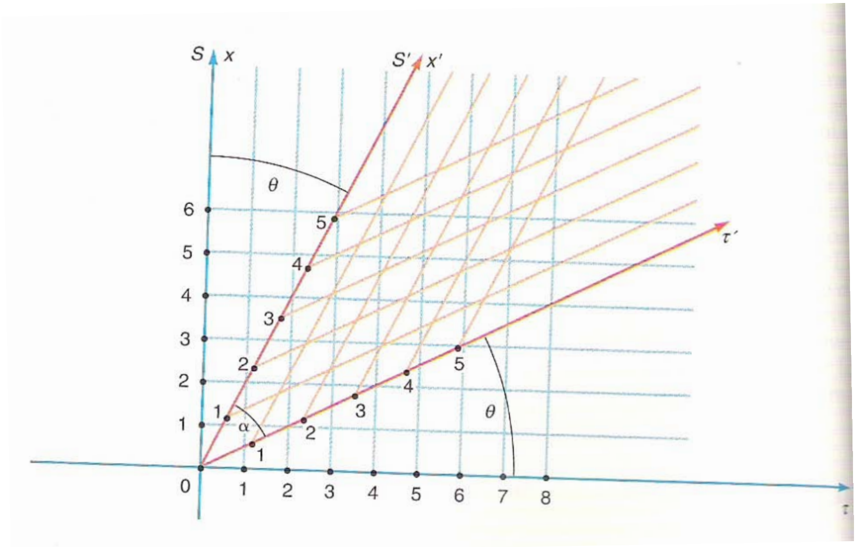
$$(\Delta s)^2 = 0, \qquad (\Delta \tau)^2 = (\Delta x)^2$$

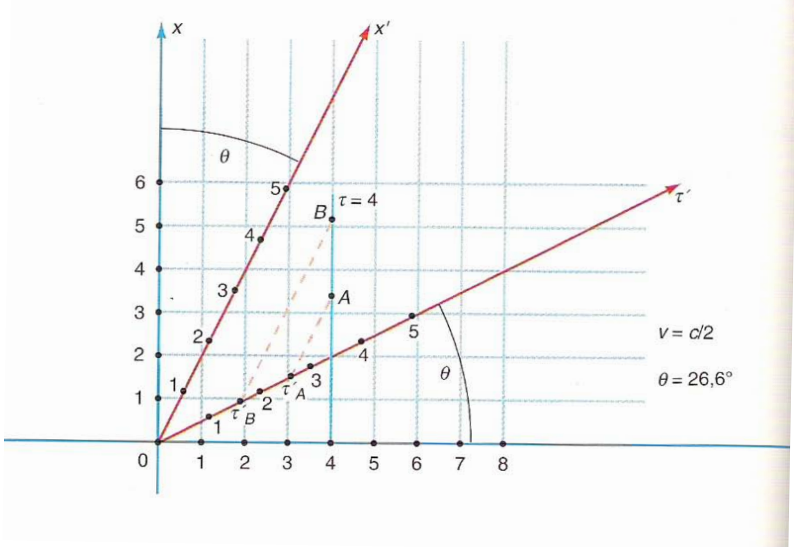
- il segmento si trova sul cono di luce.

Simultaneita’ degli eventi

- Eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono piu’ in un altro.
- Non e’ possibile invertire la sequenza temporale di un segmento timelike. Lo si puo’ fare per uno spacelike. Spazio di Minkowski.







Contrazione delle lunghezze

- Consideriamo un regolo di lunghezza propria l_0 avente come estremi $\underline{x_1}$ e $\underline{x_2}$. Avremo:

$$l_0 = x_2 - x_1$$

- Si definisce lunghezza di un segmento la differenza

$$l = x_2' - x_1'$$

- dove $\underline{x_1'}$ e $\underline{x_2'}$ sono misurate allo stesso istante di tempo t'.
- Usando le trasformazioni di Lorentz:

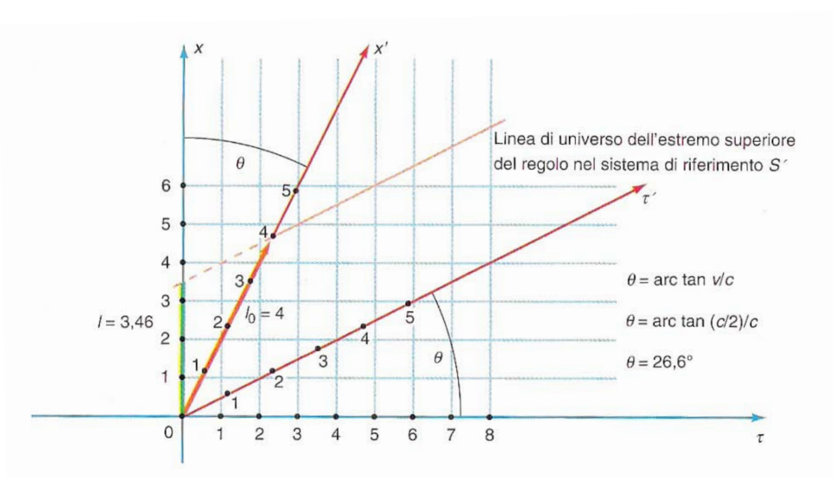
$$l_0 = x_2 - x_1 = \gamma(x_2' + vt') - \gamma(x_1' + vt') = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma l$$

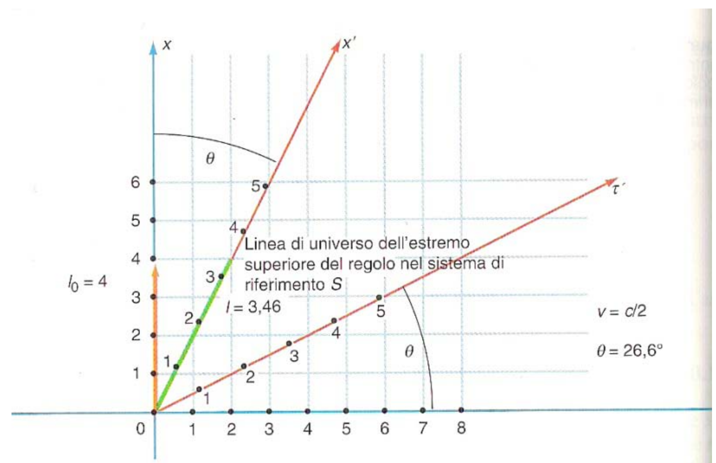
- Quindi:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$$

- Un regolo in quiete in un sistema di riferimento viene visto da un razzo che si muove con velocita' v contratto di un fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Contrazione di Lorentz-Fitzgerald.

- Se $\beta = 0.8$ un oggetto lungo 1 m viene visto di lunghezza 0.6 m.





Dilatazione dei tempi

- Consideriamo un orologio in quiete nella posizione x' di un razzo. Consideriamo due eventi successivi:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \Delta t_0$$

- Questo intervallo di tempo e' detto tempo proprio.
- L'osservatore a terra osserva i due eventi con un intervallo:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + vx'/c^2 - t'_1 + vx'/c^2) = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

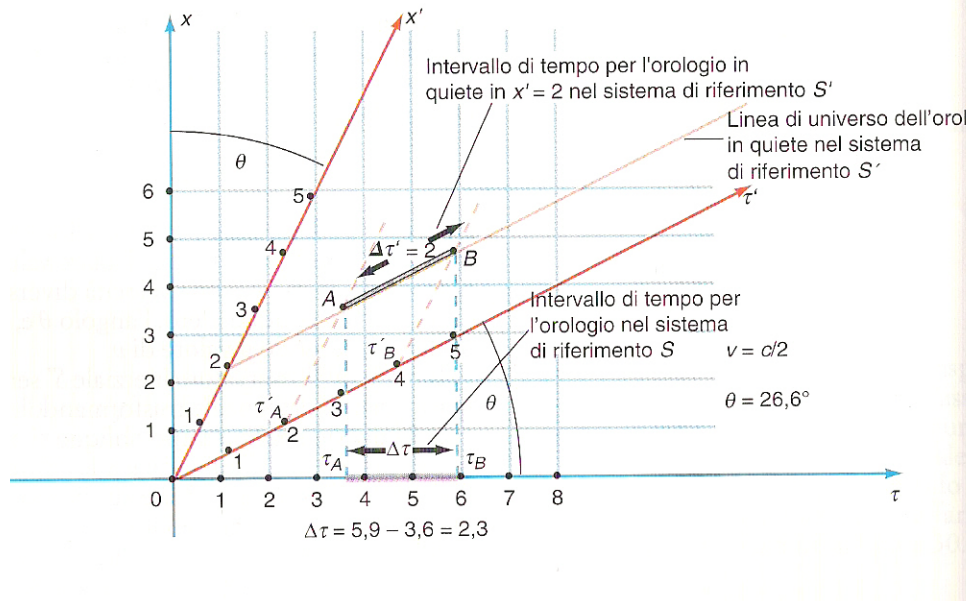
- Quindi:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Quindi:

$$\Delta t > \Delta t_0$$

- Dilatazione dei tempi.



Verifiche sperimentali

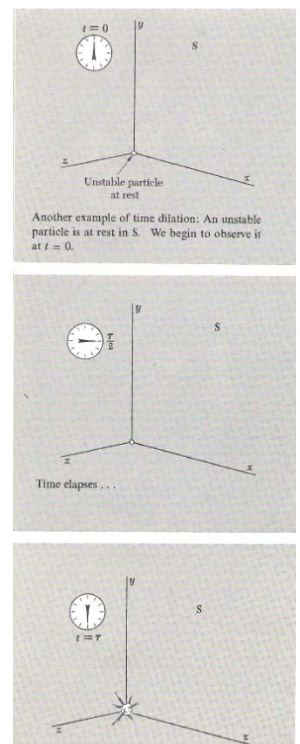
- I μ sono particelle prodotte dalle interazioni dei raggi cosmici con gli strati piu' alti dell'atmosfera. La loro vita media e':

$$\tau = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{sec}$$

- Supponiamo che esso viaggi ad una velocita' vicina a quella della luce, v=0.99 c.
- In questo tempo un percorre una distanza:

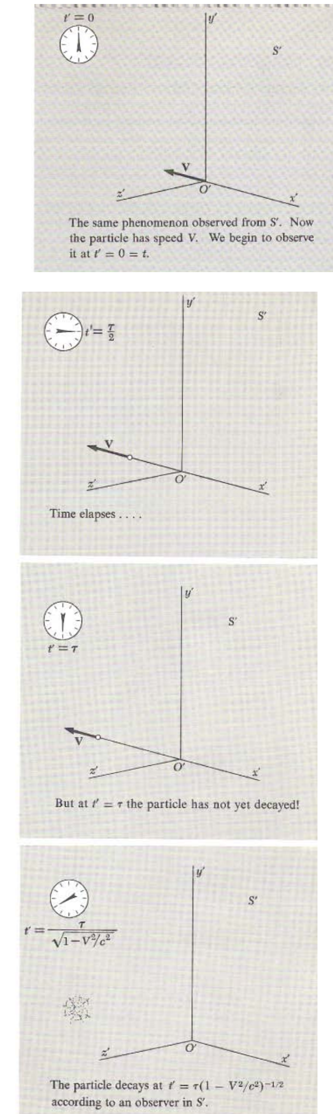
$$d = 3 \times 10^{8} \times 2 \times 10^{-6} = 6 \times 10^{2} = 600m$$

- I μ non dovrebbero quindi arrivare sulla superficie della Terra, al contrario
- di cio' che si osserva sperimentalmente. L'unica spiegazione e' nella dilatazione
- dei tempi.



Another example of time dilation: An unstable particle is at rest in S. We begin to observe it at $t = 0$.

Time elapses . . .



The same phenomenon observed from S'. Now the particle has speed V. We begin to observe it at $t' = 0 = t$.

Time elapses . . . .

But at $t' = \tau$ the particle has not yet decayed!

The particle decays at $t' = \tau(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ according to an observer in S'.

Legge di addizione delle velocita'

- Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad t = \gamma(t' + x'\beta/c)$$

- Consideramo delle vatiazioni di x e t:

$$dx = \gamma(dx' + vdt') \qquad dt = \gamma(dt' + dx'\beta/c)$$

- Dividendo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma(dt' + dx'\beta/c)} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + dx'\beta/c}$$

- Dividendo numeratore e denominatore per dt':

$$v_x = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{dx'}{dt'}\beta/c} = \frac{v'_x + v}{1 + v'_x v/c^2}$$

- Consideriamo ora le velocita' lungo i due assi y e z:

$$dy = dy' \qquad dt = \gamma(dt' + dx'\beta/c)$$

- Dividendo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + dx'\beta/c)}$$

- Dividendo numeratore e denominatore per dt':

$$v_y = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma(1 + \frac{dx'}{dt'}\beta/c)} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x v/c^2)}$$

- Analogamente per v_z .

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x v/c^2)}$$

Legge di addizione delle velocita’

- Immaginiamo ora di trasformare la luce da un riferimento all'altro.
- Sia

$$v'_x = c$$

- Otteniamo:

$$vx = \frac{c+v}{1+cv/c^2} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = \frac{c+v}{\frac{c+v}{c}} = c$$

- Quindi la velocita' della luce e' indipendente dal moto della sorgente.

Il quadrivettore energia-impulso

- Consideriamo una particella di massa M e velocita' v. Definiamo ora il seguente quadrivettore:

p = (E , **p**c)   (1)

- dove:

$$\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v} \qquad (2)$$

- Notiamo che si puo' anche scrivere:

$$p = M\gamma\beta c$$

- Definiamo l'energia E come: $E = Mc^2\gamma$

- Calcoliamo la lunghezza di questa quantita':

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4\gamma^2 - M^2\gamma^2\beta^2c^4 = M^2c^4\gamma^2(1-\beta^2) = M^2c^4$$

- La quantita' M viene definita massa a riposo ed e' un invariante relativistico.
- Quindi, se ci poniamo in un muovo sistema di riferimento:

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 \qquad (3)$$

- Cio' dimostra che effettivamente la (1) e' un quadrivettore.

Il quadrivettore energia-impulso

$$\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v} \qquad (2)$$

- Trasformazioni di Lorentz per il quadrivettore energia-impulso.

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta\frac{E'}{c}) \qquad p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z \qquad E = \gamma(E' + p_x c\beta)$$

- Dalla (2) possiamo scrivere:

$$p = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v \qquad (4)$$

- Che si puo' interpretare come una massa dipendente dalla velocita':

$$M(v) = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- La massa diventa quindi infinita quando v=c.
- Dalla (3), se una particella e' a riposo otteniamo:

$$E = Mc^2$$

- Equivalenza massa-energia.