SUNTO DI RELATIVITA' RISTRETTA

Appunti per il corso di Fisica 2
Corso di Laurea in Matematica

Massimo Bassan

Queste ***non sono dispense*** *di Relatività Ristretta: è solo una raccolta di formule per cercare di unificare la notazione, viste le tante diverse convenzioni che si incontrano sui testi.*
In molti testi potete trovare una trattazione completa ed esauriente dell'argomento. Cito a titolo di esempio, fra i tanti, quelli a me più noti:

- *ABP :E.Amaldi, R.Bizzarri, G.Pizzella:* Fisica Generale 2 *cap.10- Ed Zanichelli - il cui filo logico ho seguito in queste note*
- *LL: L.Landau, E.Lifshitz:* Teoria dei Campi - *ed Editori Riuniti - il testo classico di riferimento per relatività (ristretta ed anche generale) ed elettromagnetismo; ha la notazione più simile a quella adottata qui; testo difficile.*
- *AB: A.Bettini :* Meccanica e Termodinamica - *ed. DeciBel - , usa purtroppo l'asse temporale immaginario*
- *G.Giuliani, I.Bonizzoli:* lineamenti di elettromagnetismo *ed. La Goliardica Pavese*
- *G.Caricato, G.Duse :* Fondamenti di Relatività Ristretta *ed. CompoMat -testo uscito nel 2008*

NOTAZIONE: Riassumiamo qui le notazioni adottate in queste note (*tra parentesi la notazione alternativa NON adottata)*:
- I quadrivettori hanno la componente temporale indicata dall'indice 0 (*e non 4*), quelle spaziali da {1,2,3}.
- La metrica di Minkowski è $\eta_{jk} = diag[1, -1, -1, -1]$ (*e non diag [-1,1,1,1] nè diag [1,1,1,-1]*).
- Gli indici latini [i,j,k...] assumono i valori {0,1,2,3}, mentre quelli greci $[\mu, \nu ...] = \{1, 2, 3\}$ (*e non viceversa*).
- La quadrivelocità ha le dimensioni fisiche di [m/s] (*e non adimensionale*)
- la quadricorrente ha dimensioni di $[A/m^2]$ (*e non di* $[C/m^3]$) e il quadripotenziale di $[A] = [V \cdot s/m]$ *e non [V]*).
Esiste in letteratura una giungla di notazioni diverse, con ogni possibile combinazione delle opzioni sopra indicate.

1 Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo due sistemi di riferimento $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$, in moto relativo con velocità $\vec{u}$ lungo l'asse textbfẑ. Le trasformazioni di Galileo (GT) consentono di esprimere le coordinate di un vettore posizione $\vec{r} = \{x, y, z\}$, note in $\mathbb{R}$, anche in $\mathbb{R}'$:

$$
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \\
z' &= z - ut
\end{aligned}
$$

a queste aggiungiamo, "a posteriori", $t' = t$, ossia l'invarianza della misura del tempo da un riferimento all'altro (tempo assoluto). Nel seguito useremo la notazione $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Derivando queste equazioni rispetto al tempo una volta, si ottiene la legge di trasformazione delle velocitá :

$$
\begin{aligned}
v'_x &= v_x \qquad (1) \\
v'_y &= v_y \qquad (2) \\
v'_z &= v_z - u \qquad (3)
\end{aligned}
$$

e derivando una seconda volta, la legge di trasformazione delle accelerazioni:

$$a'_x = a_x; \qquad a'_y = a_y; \qquad a'_z = a_z \qquad (4)$$

ossia $\vec{a'} = \vec{a}$ che mostra, p.es. , come il secondo principio della dinamica (la legge di Newton) sia invariante per GT

L' equazione 3 è chiaramente incompatibile con il requisito di costanza della velocita' della luce ($c' = c$) emerso dalle osservazioni interferometriche di Michelson- Morley (1891) e dalla formulazione delle equazioni di Maxwell (1873). Per risolvere questa contraddizione, J.Larmor (1897) e H.A. Lorentz (1904) proposero le seguenti modifiche alle equazioni di trasformazione, che oggi vanno sotto il nome di Trasformazioni di Lorentz (LT)

$$
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \\
z' &= \frac{z - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\
t' &= \frac{t - uz/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Notate in particolare la quarta equazione: $t' \neq t$: la fine del tempo assoluto: il tempo diventa una coordinata che assume valori diversi nei diversi riferimenti. Queste equazioni descrivono l'unico sistema di trasformazioni di coordinate che:

- sia lineare in x,y,z,t
- garantisca che tutte le leggi della meccanica (e, vedremo poi, dell'elettromagnetismo) siano invarianti sotto trasformazione, ossia siano espresse da equazioni identiche in ogni riferimento inerziale
- verifichi il requisito $c = c'$ di invarianza della velocita' della luce
- si riduca alle trasformazioni GT per $|u| << c$

Definiamo:

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \leqslant 1 \qquad\qquad \gamma(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \geqslant 1 \tag{5}$$

Si noti che $LT \to GT$ quando $\gamma(u) \to 1$ e che $\gamma(u) \simeq 1$ per $\beta < 0.2$, ossia per $u < 6 \cdot 10^7 m/s$. Non desta perciò meraviglia che ai tempi di Galileo (ed anche molto dopo), quando queste velocità erano irrealizzabili, le trasformazioni GT fossero pienamente soddisfacenti.

Riscriviamo le LT moltiplicando la quarta equazione per c: otteniamo una forma più simmetrica e dimensionalmente coerente:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(u)(z - ut) \\ ct' &= \gamma(u)(ct - \beta z) \end{aligned}$$

Introduciamo, per ora solo come notazione di comodo, la variabile $x_0 = ct$; possiamo scrivere le trasformazioni in forma matriciale:

$$x'^j = \sum_k \Lambda^j{}_k \; x^k \tag{6}$$

dove la matrice di Lorentz Λ^j_k vale, nel caso semplice del nostro esempio:

$$\Lambda^j{}_k(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(u) & -\gamma(u)\beta \\ 0 & 0 & -\gamma(u)\beta & \gamma(u) \end{pmatrix} \tag{7}$$

La trasformazione inversa si ottiene, come evidente dalla fisica del problema, semplicemente con la prescrizione $\beta \to -\beta$.

Il caso generale, il gruppo di Lorentz, che comprende oltre alla trasformazione ad un sistema in moto inerziale in una direzione arbitraria rispetto a quello dato anche rototraslazioni del sistema di riferimento, è rappresentato da una matrice assai più complicata. La posizione degli indici (controvariante in alto e covariante in basso) sarà discussa più avanti.
Introduciamo la **convenzione di Einstein sulle somme**: si sottintende il simbolo di sommatoria

su un indice se questo e' ripetuto due volte in un'espressione, una volta in alto e una in basso. Quindi scriviamo l'eq.(8) come:

$$x'^j = \Lambda^j{}_k \; x^k \tag{8}$$

.

Trasformazioni delle velocità

Occorre derivare le coordinate spaziali rispetto al tempo corrispondente, ossia : $v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} + \frac{dx'}{dx}\frac{dx}{dt'}$ etc.

$$v'_x = \frac{1}{\gamma(u)} \; \frac{v_x}{1 - uv_z/c^2} \tag{9}$$

$$v'_y = \frac{1}{\gamma(u)} \; \frac{v_y}{1 - uv_z/c^2} \tag{10}$$

$$v'_z = \frac{v_z - u}{1 - uv_z/c^2} \tag{11}$$

Notiamo che, al contrario di quanto avviene in GT, anche le velocità "trasverse" (cioe' non parallele ad $\vec{u}$) sono modificate dalla trasformazione, anche se la variazione è depressa per un fattore γ^{-1}

Consideriamo in particolare un moto con velocità lungo la direzione di trascinamento (o, come si usa dire, di "boost") $\vec{v}//\vec{u}$. Nel nostro caso, $\vec{v} = v_z\hat{z}$, si ha:

$$v'_x = 0; \qquad v'_y = 0; \qquad v'_z = \frac{v - u}{1 - uv/c^2} \tag{12}$$

Da qui è immediato verificare, ponendo $v_z = c$, che il modulo della velocità della luce è invariato:

$$c' = \frac{c - u}{1 - u/c} = c \tag{13}$$

2 Due celebri conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz

Dilatazione dei tempi Consideriamo un orologio a riposo nell'origine di $\mathbb{R}$, che misura un intervallo di tempo Δt; osserviamo ora lo stesso intervallo di tempo misurato in $\mathbb{R}'$:
$\Delta t` = \gamma(u)(\Delta t - \beta\Delta x)$. Il secondo termine è nullo poichè l'orologio è fermo, e nell'origine. Quindi:

$$\Delta t' = \gamma(u)\Delta t \tag{14}$$

Ricordando che $\gamma(u) > 1$, vediamo che l'intervallo di tempo $\Delta t'$, misurato in ogni riferimento $\mathbb{R}'$ in moto rispetto a $\mathbb{R}$, è più lungo dell'intervallo Δt misurato nel riferimento in cui l'orologio è in quiete. Chiamiamo quest'ultimo valore, il minore possibile, **tempo proprio** e lo indichiamo con il simbolo τ. Riassumendo:

$$\boxed{\Delta t' = \gamma(u) \cdot \Delta\tau} \tag{15}$$

Contrazione delle distanze Consideriamo ora un righello di lunghezza $L = x_2 - x_1$, a riposo in $\mathbb{R}$. Osservato da un $\mathbb{R}'$ avremo

$$\begin{aligned} L' = x'_2 - x'_1 = \Delta x' &= \gamma(u)(\Delta z - u\Delta t) \qquad (16) \\ \Delta t' &= \gamma(u)(c\Delta t - \beta\Delta z) \qquad (17) \end{aligned}$$

Poichè il righello è ora in movimento, dobbiamo misurarne i due estremi *simultaneamente*, affinchè la misura abbia senso (provate a misurare la lunghezza di un'auto in corsa !). Occorre quindi imporre $\Delta t` = 0$ da cui segue: $\Delta t = u\Delta z/c^2$. Sostituendo questa condizione nella prima equazione otteniamo:

$$L' = \gamma(u)(\Delta z - \beta^2\Delta z) = \frac{L}{\gamma(u)} \qquad (18)$$

Si riconosce quindi che una qualunque lunghezza o distanza risulta *più corta* se misurata in un riferimento in cui questa è in quiete: $L` < L, \quad \forall\mathbb{R}'$.

Supponiamo di avere due osservatori, uno in $\mathbb{R}$ e l'altro in $\mathbb{R}'$, ciascuno dotato di un righello lungo L = 1 m: ciascuno vedrà l'altro più corto del proprio. Dove è la soluzione di questo assurdo ?

3 L'invariante di Lorentz - Minkowski

E' facile verificare che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la forma quadratica, detta "intervallo" :

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \quad \Delta s'^2 \qquad \forall\mathbb{R}' \qquad (19)$$

Notiamo la somiglianza formale di questo invariante con la norma (invariante per rototraslazione) di un vettore in R^3:

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = r'^2 = \delta^\mu_\nu \Delta x^\mu \Delta x_\nu \qquad (20)$$

dove δ^μ_ν è la matrice unità (simbolo di Kronecker) e abbiamo sottinteso, in base alla convenzione di Einstein, la somma sugli indici $[\mu,\nu] = 1, 2, 3$. Questo suggerisce di definire uno "spazio-tempo" quadrimensionale caratterizzata dalla metrica (19). Introducendo il *Tensore Metrico di Minkowski*

$$\eta_{jk} = diag(1, -1, -1, -1) \qquad (21)$$

riscriviamo la metrica (19) come

$$\Delta s^2 = \eta_{jk}\Delta x^k \Delta x^j = \eta_{jk}\Delta x'^k \Delta x'^j \qquad (22)$$

La similitudine di un boost di Lorentz con una rotazione intorno ad un asse coordinato può essere sottolineata, in modo suggestivo, dalla seguente considerazione: definiamo $n \equiv \tanh(\xi)$, ne segue

$\gamma(u) = \cosh(\xi); n\gamma(u) = \sinh(\xi)$. Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} x'^o &= x^o \cosh(\xi) - x^3 \sinh(\xi) \\ x'^3 &= -x^o \sinh(\xi) + x^3 \cosh(\xi) \end{aligned}$$

Cioè una rotazione di un angolo immaginario $i\xi$ intorno agli assi x^1, x^2.

NOTAZIONE: la caratteristica rilevante dell'invariante di Minkowski è che la componente temporale (0 nella nostra notazione) ha segno diverso da quelle spaziali (1,2,3). E' altrettanto lecito, e forse più intuitivo, ma meno frequente, definire η_{jk} con i segni invertiti (=diag (-1, 1, 1, 1)). Se, come accade talvolta, la variabile temporale è indicata con x_4 invece di x_0, la matrice di Minkowski avrà componenti diag (1, 1, 1, -1) oppure diag (-1,-1,-1, 1). Tutte queste notazioni sono lecite e valide: se ne sceglie una (noi abbiamo scelto la (21) e ci si attiene ad essa evitando commistioni. Citiamo infine la scelta di alcuni testi (p.es. il Bettini) di utilizzare come variabile temporale immaginaria $x_0 = ict$ ed una metrica cartesiana a 4 dimensioni. Anche se può apparire come la soluzione più semplice, non è in realtà molto usata perchè mal si presta alla generalizzazione ad un tensore metrico non diagonale e dipendente dalla posizione che viene fatta in Relatività Generale.

4 Lo spazio tempo di Minkowski e il cono di luce

Abbiamo definito lo Spazio-Tempo di Minkowski grazie alla sua metrica (19). Un punto in questo spazio-tempo è rappresentato da 3 variabili spaziali ed una temporale, ossia il luogo ed il tempo in cui viene considerato: lo chiamiamo *evento*.Possiamo dare una rappresentazione grafica a 2D dello spazio-tempo usando un asse temporale x_0 e un asse spaziale, p.es. x_3.

Per tradizione, si pone x_0 sull'asse verticale e x_3 su quello orizzontale: per un moto in una dimensione, le traiettorie sono delle curve $x_0(x_3)$, cioè con convenzione opposta rispetto alla traiettoria $z(t)$ studiata in meccanica classica.

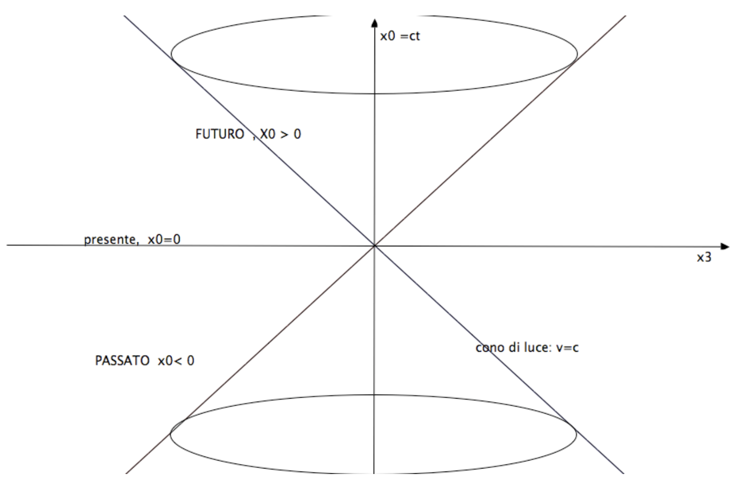

Figure 1: Rappresentazione 2D del cronotopo di Minkowski e del cono di luce

In questo diagramma l'asse verticale ($x_3 = 0$) rappresenta la storia (la *Linea di Universo*) di un corpo fermo nell'origine al passare del tempo, cioe' al crescere di x_0. Analogamente, l'asse (in generale l'iperpiano) orizzontale rappresenta l'immagine dell'universo al tempo attuale ($x_0 = 0$), ossia "il presente". Il semipiano $x_0 > 0$ è quindi il futuro, mentre il semipiano inferiore rappresenta il passato. Su questo piano $\{x_3, x_0\}$ possiamo tracciare le due rette a 45^o con gli assi, che hanno come equazione: $dx_0/dx_3 = 1$, ossia $v_z = c$. Le bisettrici dei quadranti sono dunque le traiettorie di corpi o punti materiali che si muovono alla velocità della luce. Se aggiungiamo un terzo asse x_2 queste due rette vengono estese ad un cono, detto *Cono di luce*; con il quarto asse x_1, meno intuitivo da visualizzare, avremo infine un ipercono. Il cono di luce separa lo spazio in 3 regioni: la regione interna alla falda e con $x_0 > 0$, quella con $x_0 < 0$ e la regione esterna al cono. La linea di universo dei corpi che si muovono con velocitá $|v| < c$ è contenuta interamente all'interno del cono di luce. Qualunque punto interno alla falda superiore al cono è raggiungibile dall'origine mediante un segnale che viaggi a velocitá $< c$, e rappresenta quindi il*futuro causale*, ossia l'insieme degli eventi sui quali l'osservatore posto nell'origine può avere un'influenza. Analogamente, i punti interni alla falda inferiore del cono di luce sono il *passato causale*, cioè gli eventi che possono aver influenzato l'evento nell'origine. Gli eventi che giacciono all'esterno del cono di luce sono in legame non causale con l'origine: potrebbero essere collegati ad essa solo da un segnale che viaggi a velocità $> c$, se estistesse. L'assenza di un legame causale tra l'origine e i punti esterni al cono di luce può essere sottolineata dal fatto che, con un'opportuna trasformazione di Lorentz, (vedi ABP) i due eventi possono essere portati a giacere sul nuovo asse $x'_0 = 0$, ossia essere contemporanei.

Riconsideriamo l'intervallo tra due eventi s^2: esso può essere positivo, negativo o nullo. A seconda del segno distinguiamo tre generi:

- *Genere luce* $s^2 < 0$. E' immediato riconoscere che $s^2 = 0$ implica $r^2 = (c\Delta t)^2$, ossia $v^2 = c^2$. $s^2 = 0$ è quindi la caratteristica di intervalli appartenenti al cono di luce, ed appartiene a traiettorie di fotoni e gravitoni, le uniche particelle che si propaghino alla velocità c.
- *Genere tempo* $s^2 < 0$. Ragionando come sopra otteniamo $r^2 < (c\Delta t)^2$, ossia $v < c$. E' la distanza tra due eventi tra i quali è possibile una comunicazione ed un rapporto causa-effetto.
- Genere spazio $s^2 > 0$. E' infine la distanza tra due eventi esterni al cono di luce, tra i quali non può esistere connessione causale.

Poiche' s^2 è invariante per LT, lo è anche il suo segno, e quindi anche il genere. Un intervallo di genere, e.g. tempo, lo rimane in qualunque riferimento inerziale.

Quadrivolume: Consideriamo un elemento di volume nello spazio-tempo di Minkowski : $d^4x = dx_0dx_1dx_2dx_3$, e studiamo come viene modificato in una LT :

$$d^4x' = dx'_0dx'_1dx'_2dx'_3 = (\gamma(u)dx_0) \quad dx_1dx_2 \quad (dx_3/\gamma(u)) = d^4x. \tag{23}$$

Anche l'elemento di 4-volume è quindi un invariante sotto LT

5 Quadrivettori

Ricordiamo la definizione di un vettore in R^3: è un vettore qualunque entità composta di tre componenti che si trasformino, sotto rototraslazione, come le componenti del vettore posizione $\vec{r}$:

$$v'^{\mu} = R^{\mu}_{\nu}v^{\nu} \qquad\qquad \mu, \nu = 1, 2, 3 \tag{24}$$

Come conseguenza, la norma di un qualunque vettore è conservata:

$$|\vec{r}|^2 = \delta_{jk} v^j v^k = v^j v_j = |\vec{r'}|^2 \tag{25}$$

In analogia con questa definizione, definiamo **quadrivettore** un'entità composta di quattro componenti che si trasformino, sotto boost di Lorentz, come le componenti di un evento (o quadrivettore posizione) x^j :

$$V'^j = \Lambda^j{}_k V^k \tag{26}$$

e per i quali sia quindi invariante la norma:

$$V^j V_j = \eta_{jk} V^j V^k = V_o^2 - |\vec{V}|^2 = V'^j V'_j \tag{27}$$

Un quadrivettore è composto da tre componenti "spaziali", cioè che si trasformano come le componenti di $\vec{r}$, ed una componente "temporale" che si trasforma come $x_0 = ct$. La differenza e' chiara nel segno dei rispettivi termini nella norma.
Definiamo il prodotto scalare, invariante per LT, tra due 4-vettori:

$$A^j B_j = \eta_{jk} A^j B^k = A_0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \tag{28}$$

Come per un vettore ordinario, la norma può essere interpretata come il prodotto scalare del 4-vettore con se stesso.

Quadrivettori della dinamica

Costruiamo, in analogia con la meccanica Newtoniana, le grandezze 4-vettoriali della dinamica:

- Quadrivelocitá : come primo esempio consideriamo l'estensione relativistica del vettore velocità $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x} \rightarrow \frac{d}{dt}x^j$. Questo non è chiaramente invariante (x^j lo é, ma t no).

Sostituendo $t \rightarrow \tau = t/\gamma(u)$ otteniamo una quantitá numericamente molto vicina alla velocitá Newtoniana ($\gamma \simeq 1$ per piccole $u << c$), ma invariante per boost di Lorentz. Quindi

$$v^j = \frac{d}{d\tau} x^j = \gamma(u)[c, \vec{v}] \tag{29}$$

Calcoliamo la norma di v^j in un sistema di riferimento solidale, rispetto all'osservatore, con la particella in moto: $u = v$

$$v^j v_j = \gamma^2 [c^2 - u^2] = c^2 \qquad\qquad \textit{costante} \tag{30}$$

- Quadriaccelerazione: di nuovo, deriviamo la 4-velocità rispetto al tempo proprio τ:

$$a^j = \frac{dv^j}{d\tau} \tag{31}$$

È facile vedere che la 4-accelerazione è ortogonale alla 4-velocità, nel senso che il prodotto scalare è identicamente nullo: $a^j v_j = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} v^j v_j = 0$

- Quadriquantità di moto : come in meccanica newtoniana, definiamo la 4-quantità di moto, o 4-momento, moltiplicando la 4-velocità di un corpo per la sua massa: $p^j = mv^j$. Scomposto nelle sue componenti, questo implica che

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \gamma(u)m\vec{v} \\ p^o &= \gamma(u)mc \end{aligned}$$

Uguale al momento newtoniano, tranne che per il fattore $\gamma(u)$: che a piccole velocità è ininfluente, ma che implica $\vec{p} \to \infty$ quando $u \to c$. Quale e' il significato della equazione per p^o ? Se consideriamo la grandezza cp^o e la sviluppiamo al primo ordine in serie di $n = u/c$, otteniamo

$$cp^o = \gamma(u)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \simeq mc^2[1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots] = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \cdots \tag{32}$$

Il secondo termine è l' energia cinetica del corpo in oggetto. Identifichiamo il primo termine come una *energia di massa* di cui ogni corpo, anche a riposo, è dotato, per il solo fatto di avere massa. Questa interpretazione è stata a posteriori confermata da numerosi fenomeni, p.es. dalla stabilità dei nuclei atomici o dalle reazioni di fissione e fusione nucleare. Consideriamo quindi cp^o come l'energia $\mathcal{E}$ associata alla particella. In conclusione:

$$p^j = [\mathcal{E}/c, \;\; \vec{p}] \tag{33}$$

Esplicitiamo ora la norma di p^j : possiamo scrivere $p^j p_j = m^2 v^j v_j = (mc)^2$ ma anche $p^j p_j = p^2 - (\mathcal{E}/c)^2$. Riarrangiando i termini otteniamo

$$\mathcal{E} = \pm c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \tag{34}$$

Che e' la relazione tra energia e momento (*relazione di dispersione*) per una particella relativistica. Notare che una particella con massa nulla (un fotone) può avere energia e momento. La pressione di radiazione si spiega quindi, in relatività, con un' interpretazione corpuscolare.
L'equazione 34, generalizzata ad un sistema di molte particelle (vedi ABP) è alla base della dinamica relativistica (urti elastici, disintegrazioni etc.) utilizzata negli esperimenti di alte energie su acceleratori.

6 Dinamica Lorentz- invariante

Partiamo dalle relazioni newtoniane

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt}\vec{p}; && \text{II legge della dinamica} \\ \vec{F}\cdot\vec{v} &= \frac{d}{dt}\mathcal{E}; && \text{definizione di potenza} \end{aligned}$$

È un buon punto di partenza (una relazione vettoriale + una scalare) ma non è chiaramente invariante per LT. Moltiplichiamo le equazioni per $\gamma(u)$, differenziando quindi rispetto a τ invece che t; dividiamo inoltre la seconda relazione per c. Otteniamo

$$\gamma(u)\vec{F} = \frac{d}{d\tau}\vec{p}; \qquad \gamma(u)\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{c} = \frac{d\mathcal{E}}{cd\tau} = \frac{dp^o}{d\tau} \tag{35}$$

due relazioni che possiamo sintetizzare nella relazione 4-vettoriale:

$$\frac{dp^j}{d\tau} = \gamma(u)[\vec{F} \cdot \vec{n}, \vec{F}] \equiv f^j \tag{36}$$

L'entità f^j qui definita è un 4-vettore ? Ricordiamo che, in generale, data una relazione $C = D$ valida in una qualunque classe di trasformazioni, se C varia secondo una legge data, anche D deve seguire la stessa legge di trasformazione, affinche' la relazione mantenga la sua validità. Quindi, poichè chiediamo invarianza per LT delle leggi della dinamica, e l'eq.(36) esprime l'uguaglianza tra il quadrivettore $\frac{dp^j}{d\tau}$ e l'entità f^j, ne deduciamo che anche f^j e' un quadrivettore, e la legge di Newton è espressa dalla (36) in forma covariante.

7 Vettori covarianti, controvarianti e tensori

Consideriamo la quantità $\eta_{jk} \cdot A^k$: la somma su k lascia "non saturato" il solo indice j, in basso; svolgendo il prodotto matriciale otteniamo:

$$\eta_{jk} \cdot A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & A_3 \end{pmatrix} \equiv A_j \tag{37}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito il vettore "covariante" A_j che, rispetto al vettore "controvariante" A^j, ha le componenti spaziali cambiate di segno.
Quale delle due rappresentazioni è quella "vera", o corrispondente alla realtà fisica ? Entrambe, poichè contengono la stessa informazione, ma non sono grandezze misurabili. L'osservabile fisica è la norma del quadrivettore che, secondo l'eq. (28) è data da

$$A^j A_j = \eta_{jk} A^j A^k = \eta^{jk} A_j A_k = A_0^2 - |\vec{A}|^2 \tag{38}$$

Si dice che il tensore metrico η_{jk} "abbassa l' indice" al vettore che lo segue, cioe' lo tramuta da controvariante in covariante. Analogamente la matrice η^{jk} "alza l' indice", provocando la trasformazione da covariante in controvariante. È facile verificare che la metrica di Minkowski (in generale qualunque metrica) con un indice alto e uno basso corrisponde alla matrice unità :

$$\eta^j{}_k = \eta_{jk} \cdot \eta^{jk} = \eta^{jk} \cdot \eta_{jk} = \delta^j{}_k \tag{39}$$

Tensori

Si chiama tensore di rango 2 una matrice 4 x 4 che, sotto trasformazione di Lorentz, si trasformi secondo la prescrizione seguente

$$T'^{\ jk} = \Lambda^j{}_m \Lambda^k{}_n T^{mn} \tag{40}$$

In pratica, la trasformazione consiste nel moltiplicare la matrice T per una matrice di Lorentz per ogni indice presente.
Il prodotto di due vettori $A^j B^k$ è naturalmente un tensore, ma non tutti i tensori sono fattorizzaribili in questo modo.

Esercizio: verificare che la traccia di un tensore $T^j{}_j$ è un' invariante per trasformazioni di Lorentz. Possiamo estendere immediatamente il concetto di tensore ad una entità matematica N con n indici (e quindi di rango n) :

$$N'^{\ a\ldots k} = \Lambda^a{}_m \ldots \Lambda^k{}_n N^{m\ldots n} \tag{41}$$

In Relatività Generale si incontrano vari tensori con 4 indici (4^4 elementi). Anche in teoria dell'elasticità, si trovano tensori di rango 4 ma, essendo una teoria in $\mathbb{R}^3$, gli elementi sono solo 3^4. In questo corso tuttavia ci limiteremo a considerare tensori di rango 2
Anche ai tensori è possibile alzare o abbassare uno (o più) indici moltiplicandoli a sinistra per una (o più) matrici metriche.

C'è una semplice regola mnemonica per districarsi tra gli indici di questi prodotti: gli indici ripetuti (in alto e in basso) sono "saturati" nella somma, e non compaiono nel risultato finale; gli indici rimanenti devono avere la stessa lettera e la stessa posizione (alto o basso) a destra e a sinistra del segno di uguaglianza.

8 Operatori differenziali

- *Quadrigradiente.* Consideriamo uno scalare (quindi invariante) ϕ. Il quadrigradiente di ϕ è un 4-vettore:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\ \ \phi = [\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}]\ \ \phi \equiv v_j \tag{42}$$

Il quadrigradiente è spesso indicato con la notazione abbreviata $\frac{\partial}{\partial x^j}\ \ \phi = \partial_j \phi$ o anche (in RG) $\phi_{,\ j}$
Per convincersi della natura vettoriale di v_j, consideriamo il differenziale di ϕ , anche esso scalare invariante:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} dx^j \tag{43}$$

che possiamo leggere come il prodotto scalare di $\partial_j \phi$ con il quadrivettore posizione dx^j. Siamo quindi portati a concludere che il quadrigradiente ottenuto derivando rispetto ad una coordinata controvariante si comporti come un vettore covariante: $\frac{\partial}{\partial x^j} = \partial_j$, e viceversa.

- *Quadridivergenza.* Dalla considerazione precedente segue che, interpretando ∂_j come un 4-vettore, la quantità

$$\partial_j B^j = \psi \tag{44}$$

è uno scalare. Abbiamo così definito la quadridivergenza del vettore B^j.

-*Dalembertiano.* Applicando successivamente il 4-gradiente e la 4-divergenza ad uno scalare ϕ, otteniamo un'altro scalare invariante, detto il Dalembertiano di ϕ, in quanto è soluzione dell'equazione di D'Alembert, o equazione della propagazione ondosa:

$$\partial_j \partial^j \phi = [\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2]\phi \equiv \Box\phi \tag{45}$$

9 Elettrodinamica relativistica

La quadricorrente e l'equazione di continuità

Iniziamo col considerare una quantità di carica dq contenuta in un dato volume d^3x. È un fatto sperimentalmente accertato e consistente con ogni teoria accettata che la carica elettrica sia una quantità conservata. Abbiamo dunque che $dq = \rho dx^1 dx^2 dx^3$, è invariante per qualunque trasformazione, ed in particolare per quelle di Lorentz. Confrontiamo questa relazione con la eq.(23) che stabiliva l'invarianza del 4-volume. Ne deduciamo che la densità di carica ρ si trasforma, sotto LT, come la coordinata x^0. Questa considerazione ci induce a costruire un 4-vettore in cui le componenti spaziali siano date dal vettore densità di corrente $\vec{j}$ e ρ, moltiplicata per c per motivi dimensionali, sia la componente temporale:

$$j^j = [c\rho, \vec{j}] \tag{46}$$

Ricordiamo ora l'equazione di continuità della carica elettrica: $\frac{\partial}{\partial t}\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

È immediato notare che si può riscrivere come la 4-divergenza della 4-corrente; infatti, applicando la eq.(44)) :

$$\frac{\partial}{\partial ct} c\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \quad \partial_j j^j = 0 \tag{47}$$

Questa equazione mostra che l'equazione di continuità è "covariante a vista", ossia si riconosce immediatamente la sua invarianza per LT.

I potenziali elettromagnetici

Ricordiamo che le quattro equazioni di Maxwell per i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possono essere riformulate, in modo del tutto equivalente, in termini dei potenziali scalare V e vettore $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} \Box V &= -\tfrac{\rho}{\epsilon_o} \\ \Box \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Insieme alle prescrizioni:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dot{\vec{A}}; \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}; \tag{48}$$

ed alla condizione di <u>gauge di Lorentz</u> $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2}\dot{V} = 0$

Dividendo la prima equazione per $c^2 = (\epsilon_o \mu_0)^{-1}$, si nota che nei due secondi membri compaiono le componenti del 4-vettore corrente. Utilizzando la forma 4-vettoriale del dalembertiano $\Box = \partial_j \partial^j$ e definendo la quantità 4-dimensionale (non possiamo ancora dire se 4-vettoriale !) $A^k = [V/c, \vec{A}]$, possiamo riscrivere le equazioni per i potenziali in forma compatta:

$$\partial_k \partial^k A^m = -\mu_0 j^m \tag{49}$$

Con considerazioni simili a quelle fatte per la 4-forza, possiamo convincerci che A^k compare in un'equazione in cui tutti gli altri componenti sono invarianti (Dalembertiano, μ_0) o 4-vettori (j^k) per LT, ed è quindi un quadrivettore. Notiamo anche che la Gauge di Lorentz si esprime, in maniera del tutto naturale, in modo covariante come la quadridivergenza del 4-potenziale:

$$\partial_k A^k = 0 \tag{50}$$

Il nostro obiettivo di partenza, ottenere delle equazioni per l'elettromagnetismo che non dipendessero dalla particolare LT scelta, può dirsi raggiunto. Merita notare che, mentre abbiamo dovuto modificare le leggi della dinamica con l'aggiunta di alcuni fattori $\gamma(u)$, le leggi dell'elettromagnetismo nascono (nella formulazione di Maxwell) perfettamente invarianti.

Il tensore elettromagnetico

Abbiamo visto che i potenziali elettomagnetici sono grandezze covarianti, e che quindi mantengono il loro significato fisico in ogni riferimento inerziale. Così non è per i campi elettromagnetici, che sono le quantità fisiche osservabili: basta pensare ad una carica puntiforme, che genera un campo elettrico nel riferimento in cui è in quiete, ma un campo magnetico in ogni altro, in cui è visto come una carica in moto, cioè una corrente. Esiste comunque un modo, anche se non immediatamente intuitivo, di esprimere le equazioni per i campi in forma covariante. Definiamo il tensore

$$F_{jk} \equiv \partial_j A_k - \partial_k A_j \tag{51}$$

chiaramente antisimmetrico: $F_{jk} = -F_{kj}$; $\quad F^{jj} = 0 \forall$ elemento diagonale.
E' immediato riconoscere che le equazioni per i campi (48), che esplicitiamo nelle componenti:

$$\frac{E_\mu}{c} = -\partial_\mu \frac{V}{c} - \partial_o A_\mu \tag{52}$$

$$B_\mu = \partial_\nu A_\xi - \partial_\xi A_\nu \qquad [\mu, \nu, \xi] = (1, 2, 3) \tag{53}$$

sono alcune componenti del tensore F_{jk}, ed in particolare: $F_{0\mu} = E_\mu / c$; $\quad F_{\mu j} = \epsilon_{\mu\nu k} B_\xi$.
In definitiva:

$$F_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Se alziamo i due indici di F_{jk}, passando ad un tensore controvariante: $F^{jk} = \eta^{mj}\eta^{nk} F_{jk}$, troveremo che il vettore $\vec{B}$ rimane invariato (il che riflette la natura assiale del vettore campo magnetico) mentre $\vec{E}$ cambia di segno (vettore polare).

NOTAZIONE: Il tensore elettromagnetico qui calcolato differisce da quello riportato in Landau-Lifshitz (LL) per via delle differenti unità di misura (noi usiamo il SI). Differisce anche da quello riportato in ABP, per via delle differenti scelte di notazione:

- I nostri indici vanno da 0 a 3 , e non da 1 a 4. Di conseguenza la matrice F_{jk} ha righe e colonne in ordine diverso
- la nostra normalizzazione dei vettori differisce da quella di ABP per un fattore c: lì trovate, per esempio, $j^k = [\vec{j}/c, \rho]$, $\quad A^k = [\vec{A}/c, V]$. Questo porta differenze anche in F_{jk}, dove le componenti risultano essere E_i e cB_i. Tutto ciò rientra nell'arbitrarietà delle definizioni (e nella mancanza di uno standard condiviso): quello che conta è che le equazioni che scriviamo con queste grandezze siano corrette.

Le equazioni per i campi elettrico e magnetico

Con il tensore elettromagnetico F_{jk} le equazioni di Maxwell per i campi si possono scrivere:

$$\partial^j F_{mn} + \partial^m F_{jn} + \partial^n F_{mj} = 0; \qquad \partial^j F_{jk} = \mu_0 j^j \tag{55}$$

Lasciamo come esercizio verificare che la prima relazione (che rappresenta solo 4 equazioni indipendenti) riproduce le 4 equazioni (una scalare ed una vettoriale) omogenee dell'elettomagnetismo, mentre la seconda porta alle 4 equazioni con sorgente. Non sono i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ad avere valore invariante, ma la loro combinazione nel tensore F_{jk} che, sotto LT, ne mescola le componenti ma mantiene il carattere tensoriale e quindi covariante. Anche in questo caso, passare ad un grado di libertà maggiore (un tensore di rango due, al posto di due vettori, o tensori di rango uno), porta ad una semplificazione del problema.....o quanto meno ad una soluzione soddisfacente.

La forza di Lorentz

Una teoria di campo si compone delle equazioni che definiscono il campo (nel nostro caso le equazioni di Maxwell) e dall'equazione che definisce il moto di una particella nel campo suddetto: per il campo elettromagnetico e' la seconda legge della dinamica (eq.36) dove la forza e' quella di Lorentz. Esprimiamo quindi la forza di Lorentz in forma covariante:

$$f^j_{Lorentz} = qF^{jk} v_k \tag{56}$$

Per convincerci della correttezza di questa formulazione, consideriamo p.es. una coordinata spaziale:

$$\begin{aligned} f^1_{Lorentz} &= q[-F^{10} \cdot c + F^{12} \cdot v_2 + F^{13} \cdot v_3]\gamma(u) && (57) \\ &= \gamma(u)q[E^1 + v_2 B^3 + v_3 B^2] = \gamma(u)q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]_1 && (58) \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che $F^{11} = 0$.
Ne segue quindi che la legge del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico si scrive come:

$$\frac{dp^j}{d\tau} = qF^{jk} v_k \tag{59}$$

Equazione invariante senza bisogno di alcun ritocco.